

CONTROL LÍMITES Y CONTINUIDAD

Abril 2003

1.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica las discontinuidades

a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

b) $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(3 puntos)

2.- Halla las asíntotas de la siguiente función y sitúa la curva respecto a cada una de ellas.

$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$

(2,5 puntos)

3.- Representa gráficamente de manera razonada una función $y=f(x)$ que cumpla:

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, $f(1) = -3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

(1,5 puntos)

4.- Calcula:

(1,5 puntos)

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 11x - 10}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2}{3x^2 + 5x - 1}$

5.- Contesta a las siguientes cuestiones:

(1,5 puntos)

a) ¿Puede una función racional tener dos asíntotas verticales? ¿Por qué?

b) ¿Puede una función racional tener una asíntota horizontal y una oblicua? ¿Por qué?

Pon ejemplos

➤ SOLUCIONES

1) a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ función racional, continua en su dominio

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{continua en } \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

Veamos qué tipo de discontinuidades presenta en 2 y 3:

$$\text{En 2: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-5}{0} = \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-}{-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-}{+} = -\infty \end{cases}$$

En 2 tiene una discontinuidad de salto infinito (A.V. de ramas divergentes)

$$\text{En 3: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-2} = 6$$

En 3 tiene una discontinuidad evitable (Ya que no existe $f(3)$)

b) $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ cada trozo es una función polinómica, luego es

continuo, habrá que ver qué pasa en 2:

$$f(2) = 2 - 1 = 1 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = 2-1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2) = 2^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{No existe el límite en 2}$$

tenemos, por tanto una discontinuidad en 2 de salto finito

$$2.- f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$$

Asíntotas verticales: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \frac{13}{0} = \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

A. Horizontales NO TIENE

A. Oblicuas: Dividiendo tenemos que: $\frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2} = 2x - 1 + \frac{1}{x + 2}$

Con lo que, la asíntota oblicua es $y = 2x - 1$

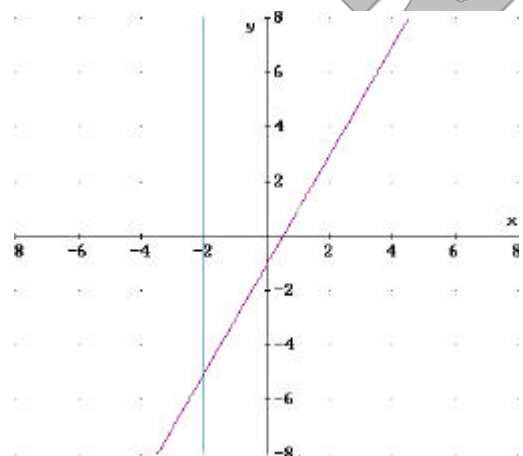
Para ver cómo se sitúa la gráfica respecto de ésta asíntota, vemos el signo de

$\frac{1}{x + 2}$ para valores grandes de x (positivos y negativos)

para $x = 10000 \Rightarrow \frac{1}{x + 2} > 0$ lo que significa

que la gráfica está por encima de la asíntota cuando $x \rightarrow +\infty$

para $x = -10000 \Rightarrow \frac{1}{x + 2} < 0$ lo que significa



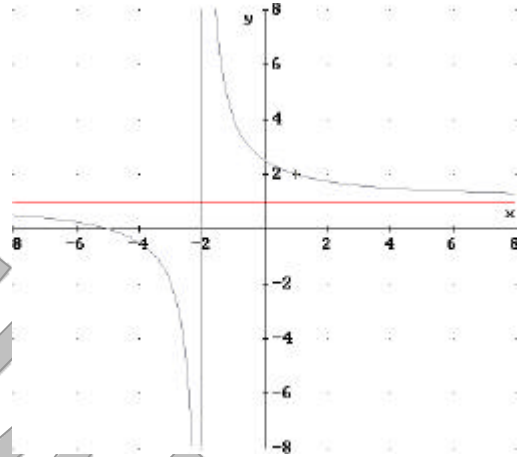
que la gráfica está por debajo de la asíntota cuando $x \rightarrow -\infty$

$$3.- \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Vemos que:

- en -2 tiene una asíntota vertical de ramas divergentes
- $y=1$ es una asíntota horizontal, por la derecha y por la izquierda
- existe el límite en el punto 1 y vale 2, es decir, la curva se “acerca” al punto (1,2) (puede ser “pasando” por ese punto, o teniendo un “agujero”, es decir, una discontinuidad evitable)

La gráfica, por tanto, puede ser algo así:



4.-

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 11x - 10} = \frac{0}{0} \text{ (Factorizamos y nos queda:)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 11x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2 - 3x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2 - 3x + 5} = \frac{1}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2}{3x^2 + 5x - 1} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \text{ (polinomios del mismo grado, el límite es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado)}$$

5.- a) Si, ya que el denominador puede ser un polinomio con más de una raíz, por ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ tiene dos asíntotas verticales: $x = 2$; $x = -2$

b) No, ya que para que tenga A. Horizontal tiene que ser el grado del polinomio numerador menor o igual que el del denominador y para que tenga oblicua justo lo contrario (incompatibles). Ejemplos:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} \text{ tiene asíntota horizontal } y = 0 \text{ (imposible que tenga oblicua)}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-2} \text{ tiene una asíntota oblicua ya que el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, y por lo mismo es imposible que tenga una asíntota horizontal.}$$